آموزش

ریاضیات تشریحی

آموزش دقیق و مفهومی دروس، مثال های متنوع و بررسی سؤالات امتحانی در جزوات درس آموز

نمونه از جزوات:

هندسه دهم

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

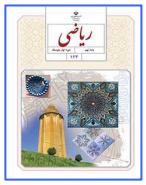
(جزوات آموزش تشریحی)

درسنامه دقیق و مفهومی با مثال‌های فراوان

شامل

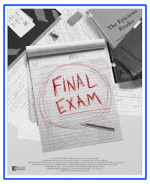
مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده کتاب درسی

(نمره ۲۰ امتحان پایانی)



مثال، فعالیت

و تمرینات برگزیده کتاب درسی عینا وارد جزوه شده.



سؤالات امتحانی

ادوار مختلف آورده و بررسی و پاسخ داده شده.

پوشش کامل محتوای کتاب درسی

این مجموعه ویژه شما است . . .

آموزش:
هندسه دهم
۰
مقدمات هندسه
۲
۱
ترسیم هندسی
و استدلال
۱۸
۲
قضیه تالس
و تشابه
۴۷
۳
چند ضلعی
۷۹
۴
تجسم فضایی
۱۱۰

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

آموزش تشریحی

هنـــدسه ۱

۱

ترسیم هندسی و استدلال

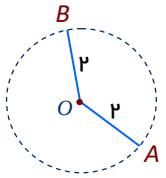
فهرست مطالب	صفحه
ترسیم‌های هندسی	۱۹
استدلال و استنتاج	۲۸
قضایای شرطی و دوشرطی	۳۵
تمرینات	۴۱
پاسخ فعالیت‌های پای تخته	۴۳

http://www.darsamoz.com

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

بخش ۱
روش‌های ترسیم
http://www.darsamoz.com

دایره‌ای به مرکز یک نقطه‌ی O و شعاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید:



نقاط روی این شکل هندسی همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند که هنگام رسم دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

تمام نقاط دایره به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی O قرار دارند.

یعنی در شکل بالا:

اندازه‌ی شعاع‌های OA و OB و هر شعاع دیگری برابر ۲ سانتی‌متر است.

توجه:

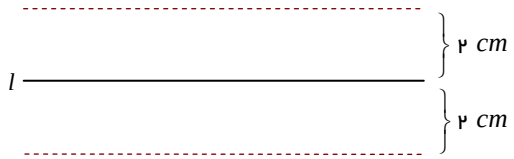
(طول یک پاره‌خط مانند AB را به صورت $\overline{AB}$ یا $|AB|$ می‌نویسند؛ ما در ادامه برای سادگی، معمولاً طول را هم با نماد AB نشان می‌دهیم.)

در حالت کلی:

هر ترسیم هندسی با توجه به خاصیت یا خواص مشترک نقاط آن انجام می‌شود.

نمونه‌ی دیگری ببینید:

اگر l یک خط باشد، مجموعه نقاطی به فاصله‌ی ۲ از l، دو خط موازی به فاصله‌ی ۲ در دو طرف آن است:



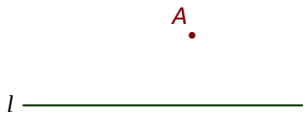
تکنیک رسم:

بسیاری مواقع در یک ترسیم هندسی باید نقطه‌ای را بیابیم که دارای دو ویژگی باشد. در این صورت:

- مجموعه نقاط مربوط به هر یک از ویژگی‌ها را رسم می‌کنیم.
- نقطه یا نقاطی که در هر دو مکان مشترک باشد، جواب مورد نظر را مشخص می‌کند.

نمونه‌ی بعد را ببینید:

مثال: خط l و نقطه‌ی A خارج آن در شکل روبرو داده شده است.



نقطه‌ای روی l مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد. آیا همیشه چنین نقطه‌ای وجود دارد؟

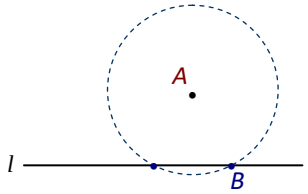
پاسخ

باید به دنبال نقطه‌ی B با دو ویژگی زیر بگردیم:

۱) لازم است B روی خط l باشد. **(ویژگی اول)**

۲) باید فاصله‌ی B تا A برابر ۲ سانتی‌متر باشد، یعنی روی دایره به مرکز A و شعاع ۲. **(ویژگی دوم)**

برخورد دو مکان هندسی، جواب یا جواب‌ها را معلوم می‌کند:



(دو جواب در شکل دیده می‌شود.)

توجه کنید:

اگر دایره با خط نقطه‌ی مشترک نداشت، جواب پیدا نمی‌شد؛ بعلاوه، اگر دایره و خط بر هم مماس بودند، فقط یک جواب حاصل می‌شد.

مثال: مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

پاره‌خط BC را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. اکنون باید به دنبال نقطه‌ی A با دو ویژگی زیر بگردیم:

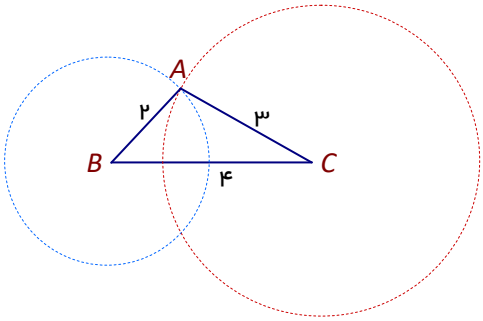
۱) لازم است فاصله‌ی A تا B برابر ۲ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز B و شعاع ۲ سانتی‌متر است.

۲) لازم است فاصله‌ی A تا C برابر ۳ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است.

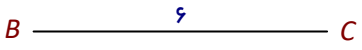
با رسم دو دایره، برخورد آن‌ها نقطه‌ی A را مشخص خواهد کرد:



مثال: آیا می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۶ سانتی‌متر رسم کرد؟ نتیجه‌ی پاسخ خود را بیان کنید.

پاسخ

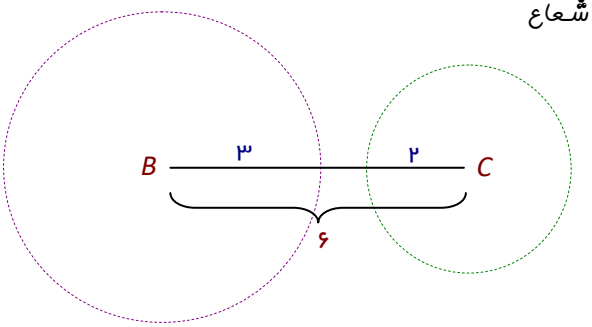
مشابه مثال قبل، ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم.



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

اکنون،

به مرکز B دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر و به مرکز C دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم:



چنان‌که می‌بینیم، چون $۶ > ۳ + ۲$ است، دایره‌ها یکدیگر را قطع نکرده و مثلثی حاصل نمی‌شود.

نتیجه:

شرط آن‌که مثلثی به طول اضلاع a، b و c وجود داشته باشد این است که هر سه نامساوی زیر برقرار باشد:

$$a < b + c \quad \text{و} \quad b < a + c \quad \text{و} \quad c < a + b$$

یعنی:

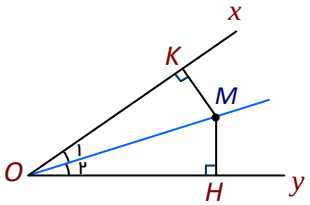
باید جمع طول‌های هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد.

در ادامه به معرفی و رسم چند ترسیم هندسی استاندارد می‌پردازیم؛ قبل از آن توجه کنید:

- برای رسم یک دایره، به مرکز آن و اندازه‌ی شعاع نیاز است و سپس توسط پرگار ترسیم انجام می‌شود.
- برای رسم یک پاره‌خط، نیم‌خط و یا خط به دو نقطه روی آن نیاز بوده و سپس رسم توسط خط‌کش انجام می‌شود.

در اولین مورد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی نیمساز یک زاویه را ببینید:

مثال: اگر نقطه‌ی M روی نیمساز یک زاویه باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو ضلع آن زاویه برابر است. یعنی:



$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow MH = MK$$

برهان

به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث $\overset{\Delta}{OMH}$ و $\overset{\Delta}{OMK}$ طبق یکی از حالت‌های خاص مثلث‌های قائم‌الزاویه، یعنی: «وتر و یک زاویه‌ی تند» هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر بوده و از جمله $MH = MK$ است.

نشان دهید عکس مثال بالا هم درست است؛ یعنی:

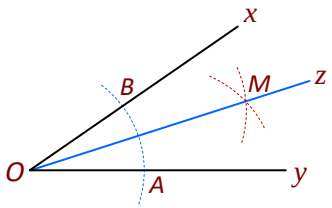
پای تخته !

۱. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو ضلع یک زاویه داشته باشد، در این صورت روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز:

با استفاده از خط‌کش و پرگار، رسم نیمساز یک زاویه‌ی $\widehat{xOy}$ طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواهی باز کرده و به مرکز O یک کمان می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه را در نقاط A و B قطع کند.
- اکنون به مراکز A و B و با شعاع دلخواهی دو کمان می‌زنیم به شرطی که یکدیگر را در نقطه‌ای چون M قطع کنند. سپس نیم‌خط Oz را از O و M عبور می‌دهیم:



توجه کنید:

اگر پاره خط‌های BM و AM را رسم کنید، دو مثلث OBM و OAM طبق حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت خواهند شد و بنابراین:

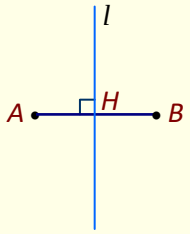
$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} \quad \Rightarrow$ **نیم‌خط Oz نیمساز زاویه‌ی است**

ترسیم اصلی دیگر، عمود منصف یک پاره‌خط است که ابتدا مفهوم دقیق آن را یادآوری می‌کنیم:

عمود منصف پاره‌خط:

یک پاره‌خط مانند AB در نظر بگیرید. عمود منصف این پاره‌خط، خطی مانند l با دو خاصیت زیر خواهد بود:

- اولاً: خط l از وسط پاره‌خط عبور می‌کند: $AH = HB$
- ثانیاً: خط l بر پاره‌خط AB عمود است: $\hat{H} = ۹۰^\circ$



در نمونه‌ی بعد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی عمود منصف یک پاره‌خط را ببینید:

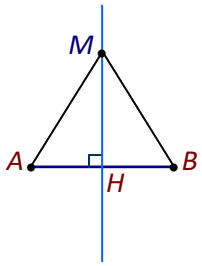
مثال: اگر نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو سر پاره‌خط برابر است.

یعنی:

$$MA = MB$$

برهان

به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:



$$\left.\begin{array}{l} AH = HB \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $MA = MB$ است.

نشان دهید برعکس مثال بالا هم درست است:

پای تخته !

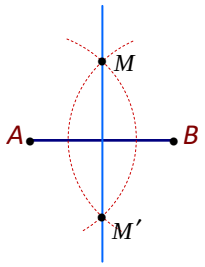
۲. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو سر پاره‌خط AB داشته باشد، M روی عمود منصف قرار دارد.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

رسم عمود منصف:

با توجه به دو مورد بالا، برای رسم عمود منصف، دو نقطه به فاصله‌ی برابر تا A و B مشخص کرده و خط گذرا از آن دو رسم می‌شود:

- دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کرده، یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند.



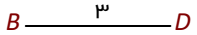
- فاصله‌های M و M' از نقاط A و B برابر شعاع دایره‌های یکسانی بوده و در نتیجه با هم برابرند، پس این دو نقطه روی عمود منصف قرار دارند. پس خط گذرا از این دو نقطه همان عمود منصف است.

مثال: یک لوزی با طول قطرهای ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

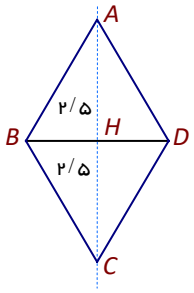
پاسخ

طبق این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط BD را به طول ۳ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، عمود منصف BD را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.



سپس کافی است از نقطه‌ی H به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر بالا و پایین رفته تا نقاط A و C مشخص شوند. در پایان این نقاط را با خط‌کش به یکدیگر وصل می‌کنیم:



نوبت شماست . . .

پای تخته !

۳. یک لوزی با طول قطر کوچک ۴ سانتی‌متر و طول ضلع ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

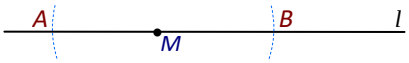
در ادامه چند ترسیم هندسی دیگر با استفاده از روش رسم عمود منصف بیان می‌شود:

رسم عمود بر خط:

خط l و نقطه‌ای چون M در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که بر l عمود باشد. این ترسیم در دو حالت انجام می‌شود:

حالت (۱): فرض کنید نقطه‌ی M روی خط l قرار داشته باشد.

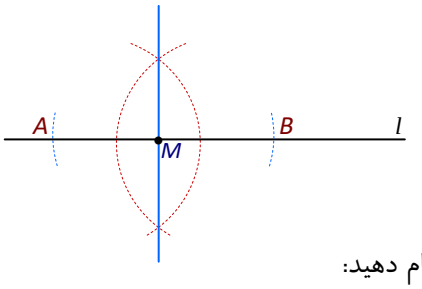
گام اول: توسط پرگار به مرکز M و شعاع دلخواهی کمان‌هایی می‌زنیم تا خط l را در دو طرف M در نقاط A و B قطع کند:



توجه کنید:

چون شعاع دو کمان یکسان است، داریم $MA = MB$ و بنابراین M وسط پاره‌خط AB است.

گام دوم: اکنون اگر به روش گفته شده، عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط l عمود بوده و از نقطه‌ی M نیز عبور خواهد کرد:



حالت دیگر رسم خط عمود را به صورت مشابه بالا انجام دهید:

پای تخته !

۴. **حالت (۲):** فرض کنید نقطه‌ی M خارج روی خط l قرار داشته و با تکمیل گام‌های زیر، خطی گذرا از M بر l عمود کنید.

گام اول: دو نقطه مانند A و B روی خط l مشخص کنید به طوری که $MA = MB$ باشد.

گام دوم: عمود منصف AB را رسم کنید. چرا نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد؟

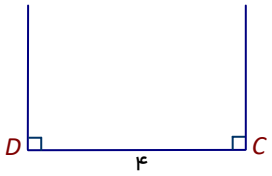
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مثال: یک مستطیل به طول ۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی قطر ۶ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

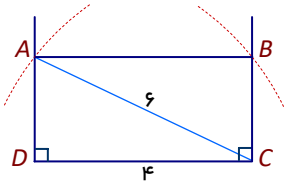
طبق این خاصیت که «زوایای مستطیل قائمه هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط DC را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، در نقاط D و C دو خط بر DC عمود رسم می‌کنیم.



اکنون توجه کنید:

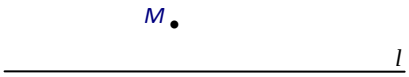
چون طول قطر برابر ۶ است، نقطه‌ی A روی خط عمود سمت چپ و دایره‌ی به مرکز C و شعاع ۶ قرار دارد. نقطه‌ی برخورد این دو، نقطه‌ی A است. به همین صورت، دایره‌ی به مرکز D و شعاع ۶ سانتی‌متر، نقطه‌ی B را مشخص خواهد نمود:



کاربرد بعدی عمود منصف، رسم خطی موازی یک خط داده شده است:

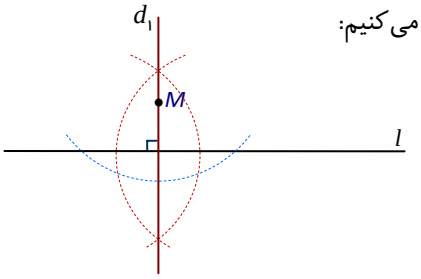
رسم خط موازی:

خط l و نقطه‌ای چون M در خارج آن در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که با l موازی باشد:



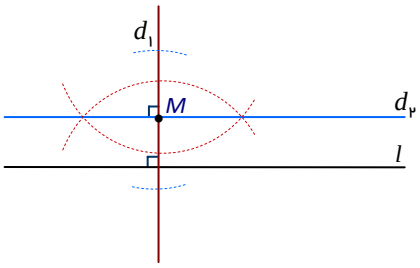
گام (۱):

طبق حالت (۲) از رسم خط عمود، از نقطه‌ی M خط d_1 را بر l عمود می‌کنیم:



گام (۲):

اکنون نقطه‌ی M روی خط d_1 قرار دارد. این بار طبق حالت (۱) از رسم خط عمود، خطی چون d_2 از نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود می‌کنیم:



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

نتیجه‌گیری:

خط d_2 از نقطه‌ی M عبور کرده و داریم:

$$l \perp d_1 \quad \text{و} \quad d_2 \perp d_1$$

بنابراین:

هر دو خط l و d_2 بر خط d_1 عمود بوده و در نتیجه خودشان موازی‌اند. یعنی: $d_2 || l$ و d_2 همان خط مورد نظر است.

بخش ۲

استدلال و استنتاج

http://www.darsamoz.com

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان دهد (یعنی: اثبات کند.) در این گونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود:

استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.

برای نمونه؛

ممکن است با مشاهده‌ی اعداد اول: ۳,۷,۱۱,۲۳، نتیجه بگیریم که اعداد اول همگی فرد هستند.

(البته نتیجه نادرست است!)

نمونه‌ی دیگر:

مثال: یک انسان اولیه را در نظر بگیرید. او ممکن است بعد از کشف آتش، این تجربیات را داشته باشد:

- با حرارت دادن آب، ببینید پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل شده است.

و به علت دانش و اطلاعات ناقص، نتیجه گرفته باشد که:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود!

می‌دانیم که این نتیجه برای تمام اشیاء صحیح نیست و در نتیجه استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

توجه کنید:

در مورد استفاده از استدلال استقرایی به دو مورد مهم اشاره می‌شود:

- احکام بدست آمده به روش استقرایی ممکن است نادرست باشند. لذا این روش استدلال قابل اطمینان نبوده و باید احکام به روش‌های دیگری به‌طور قطعی تایید شوند.
- با وجود این‌که روش استقرایی قابل اطمینان نیست، برای بدست آوردن فرضیه‌های علمی و حتی در برخی بررسی‌های علوم تجربی به عنوان تنها ابزار، از آن استفاده می‌شود.

در همین درس نیز:

در بخش پایانی **فصل (۳)**، کاربرد جالبی از استدلال استقرایی را در قضیه‌ی پیک خواهیم دید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

روش اصلی و قوی‌تر استدلال در ریاضیات را ببینید:

استدلال استنتاجی:

برخورد صحیح با یک حکم (درست) این است که:

- بر اساس حقایق و احکام کلی از پیش قبول کرده و
- با استفاده از محاسبات و دلایل منطقی

درستی آن حکم خاص را نشان دهیم که به این روش «**استدلال استنتاجی**» گویند. بنابراین:

استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.

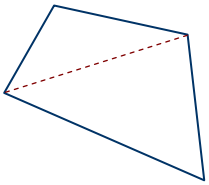
مثال: در فصل مقدماتی با استدلال استنتاجی نشان دادیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است. با استفاده از این حقیقت شناخته شده از قبل، نشان دهید:

مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است.

بعلاوه، در مورد مجموع زوایای داخلی n ضلعی چه می‌توان گفت؟ $(n \geq ۳)$

پاسخ

در چهارضلعی دلخواه مقابل، یک قطر را رسم کرده‌ایم:



چنان که می‌بینید:

مجموع زوایای چهارضلعی با مجموع زوایای دو مثلث یکسان است. یعنی:

$$۲\times۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

بعلاوه:

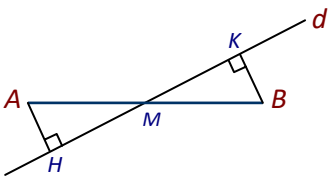
اگر یک n ضلعی داشته باشیم، می‌توان تعداد $n-۲$ مثلث در آن ایجاد کرد و بنابراین مجموع زوایای داخلی آن برابر است با:

$$(n-۲)\times۱۸۰^\circ$$

مثال: فرض کنید خط d از وسط پاره‌خط AB عبور کند. با استدلال استنتاجی نشان دهید فاصله‌ی نقاط A و B تا خط d با هم برابر است.

پاسخ

در شکل مقابل، M را وسط AB بگیرید:



طبق خاصیت زوایای متقابل به رأس:

$$A\hat{M}H = B\hat{M}K \quad \text{و} \quad MA = MB$$

پس دو مثلث قائم الزاویه AMH و BMK طبق حالت «وتر و یک زاویه‌ی تند» هم‌نهشت بوده و در نتیجه: $AH = BK$ است.

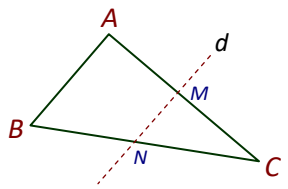
توجه کنید:

در استدلال استنتاجی بالا، حقایق شناخته شده‌ی زیر را بکار بردیم:

- برابری زوایای متقابل به رأس.
- هم‌نهشتی دو مثلث به حالت «و ز».
- برابری اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت.

مثال: در مثلث داده شده‌ی ABC، خطی مشخص کنید که فاصله‌ی رأس‌های مثلث از آن یکسان باشد. چند خط با این شرط وجود دارد؟

پاسخ



نقاط M و N را به ترتیب وسط‌های اضلاع AC و BC در نظر گرفته و خط d گذرا از این دو نقطه را رسم می‌کنیم.

اکنون:

- چون M وسط AC است، فاصله A و C تا خط d برابر است.
- چون N وسط BC است، فاصله B و C تا خط d برابر است.

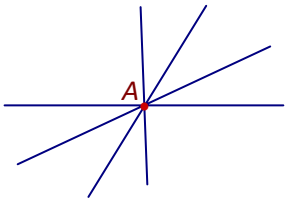
بنابراین فاصله‌ی هر سه رأس تا خط d با هم برابر خواهد شد.

توجه کنید:

می‌توان دو خط دیگر مانند d از وسط‌های AB و BC و همچنین وسط‌های AB و AC عبور دارد، پس در کل سه خط با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

در ادامه یک مفهوم هندسی معرفی کرده و سپس نمونه‌های دیگری از استدلال استنتاجی را خواهیم دید.

خطوط همرس:



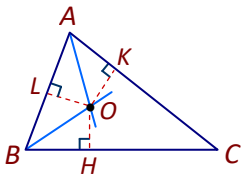
چند خط که همگی در یک نقطه چون A مشترک باشند را همرس گویند:

بعلاوه: نقطه‌ی A را نقطه‌ی همرسی این خط‌ها می‌نامیم.

مثال: نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

برهان

مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم کرده و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. همچنین با رسم عمودهایی از O بر اضلاع، فاصله‌ی O تا سه ضلع به صورت OH، OK و OL مشخص می‌شوند:



اکنون توجه کنید:

- چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است، طبق خاصیت نیمساز داریم:

$$OK = OL$$

- به صورت مشابه، چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است، طبق خاصیت نیمساز می‌نویسیم:

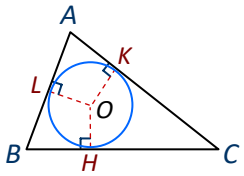
$$OH = OL$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OH = OK$، یعنی فاصله‌ی O تا دو ضلع زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز با هم برابر است و در نتیجه: نقطه‌ی O روی نیمساز $\hat{C}$ نیز قرار داشته و سه نیمساز در نقطه‌ی O همرس هستند.

نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

- نقطه‌ی همرسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی O تا سه ضلع مثلث با هم برابر است: $OH = OK = OL$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OH باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط H، K و L عبور خواهد کرد:



توجه کنید:

این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است.

با روشی کاملاً مشابه مثال قبل و با توجه به ویژگی عمود منصف، نشان دهید:

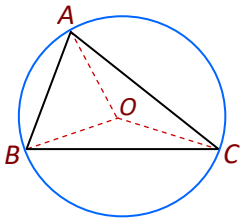
پای تخته !

۵. عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

توجه کنید:

فعالیت پاتخته قبل نیز، موارد مهم زیر را حاصل می‌کند:

- نقطه‌ی همرسی سه عمود منصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی O تا سه رأس مثلث با هم برابر است: $OA = OB = OC$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد!

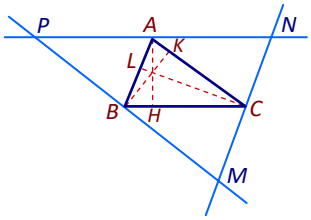


در فعالیت بعدی، به کمک شما خواهیم دید ارتفاع‌های هر مثلث نیز همرس‌اند:

پای تخته !

۶. با انجام گام‌های ساده‌ی زیر، نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

گام ۱: مثلث ABC و ارتفاع‌های AH ، BK و CL را در آن در نظر بگیرید.



گام ۲: از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبرو رسم کنید تا از برخورد آن‌ها مثلث MNP ایجاد شود.

گام ۳: دلیلی بیاورید که نشان دهد AH بر PN ، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

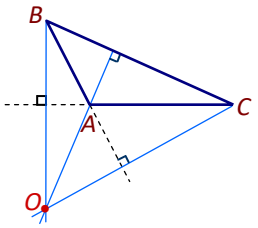
گام ۴: دلیلی بیاورید که نشان دهد چهار ضلعی‌های $ABCN$ و $ACBP$ متوازی الاضلاع هستند و نتیجه بگیرید که $AN = AP$ است و به صورت مشابه $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵: از گام‌های ۳ و ۴ نتیجه بگیرید که ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP بوده و در نتیجه همرس هستند.

توجه کنید:

بر خلاف نقطه‌ی همرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قرار دارد، نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها و عمود منصف‌های اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

نمونه:

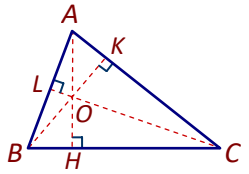


در مثلث ABC مقابل، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل عمود شده و فقط یکی از ارتفاع‌ها بر ضلع مقابل BC عمود شده است. در نتیجه، نقطه‌ی همرسی O در بیرون مثلث قرار گرفته است.

در مثال بعد، نمونه‌ی دیگری خواهیم دید:

مثال: مثلث دلخواه ABC را با شرط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و O را نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های آن در نظر بگیرید. سپس نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث OAC را مشخص کنید.

پاسخ



با دقت به مثلث OAC نگاه کرده و سه ارتفاع را تشخیص می‌دهیم:

- پاره‌خط OK یکی از ارتفاع‌ها است که از O بر ضلع AC عمود شده است.
- پاره‌خط AL در بیرون مثلث OAC از A بر امتداد ضلع OC عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.
- به صورت مشابه: پاره‌خط CH در بیرون مثلث OAC از C بر امتداد ضلع OA عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.

بنابراین باید نقطه‌ی برخورد خط‌های گذرنده از سه ارتفاع، یعنی OK، AL و CH به عنوان نقطه‌ی همرسی مشخص شود که مشاهده می‌کنید نقطه‌ی B خواهد بود!

گاهی یک حکم نادرست است، اثبات نادرست بودن احکام معمولاً کار نسبتاً ساده‌ای می‌باشد:

مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی «**مثال نقض**» گفته می‌شود.

مثال: برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) اگر $x^۲ > ۴$ باشد، در این صورت $x > ۲$ است.

ب) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

پاسخ

الف) عدد $x = -۳$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $(-۳)^۲ = ۹ > ۴$ صحیح بوده ولی -۳ بزرگ‌تر از ۲ نیست و بنابراین حکم نادرست است.

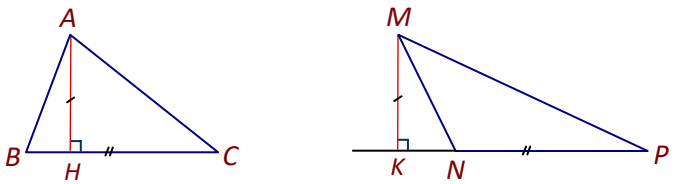
ب) کافی است مثلثی با یک زاویه‌ی باز (مانند نکته و مثال قبل) را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید؛ زیرا نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار می‌گیرد.

مثال: برای ادعای زیر مثال نقض آورده و آن را رد کنید:

هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

پاسخ

مثلث‌های ABC و MNP در زیر، قاعده و ارتفاع برابر داشته، پس مساحت‌های برابر دارند:



ولی زوایای دو مثلث یکسان نبوده و نمی‌توانند هم‌نهشت باشند.

با دقت، نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته !

۷. برای حکم کلی زیر مثال نقض بیاورید:

هر چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی الاضلاع است.

بخش ۳

قضایای شرطی

http://www.darsamoz.com

در این بخش، با روش بیان دقیق‌تر مفاهیم و احکام هندسی آشنا می‌شویم. در واقع با بیان احکام به صورت استاندارد، با مطالب جدید و بسیار مهمی آشنا خواهیم شد:

گزاره:

در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک **«گزاره»** گویند.

- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی **«ساده»** گوئیم.
- اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی **«مرکب»** گویند.

برای نمونه؛

- عبارت «عدد ۷ سومین عدد اول است.» یک گزاره‌ی ساده است.
- عبارت «عدد ۷ چهارمین عدد اول و $-\frac{۳}{۲}$ عددی گنگ است.» یک گزاره‌ی مرکب است.

بعلاوه؛

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو مسیر زیر دنبال گردد:

الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، **«برهان»** هم گفته می‌شود.

مانند: همرس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث که در بخش قبل دیدیم. بویژه، در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند:

قضیه:

در هندسه، گزاره‌هایی مهم که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، **«قضیه»** نامیده می‌شوند. بنابراین:

قضیه: گزاره‌ی کلی و مهمی است که همیشه درست باشد.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن مثال نقض بیاوریم.

برای بیان واضح‌تر یک قضیه یا یک گزاره، با تعیین فرض و حکم، آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم:

قضیه و گزاره‌ی شرطی:

می‌توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد که در این صورت به آن **«گزاره شرطی»** گویند:

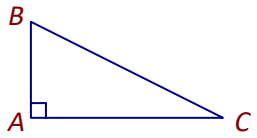
اگر فرض، آنگاه حکم

بویژه:

اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن «**قضیه شرطی**» گفته می‌شود.

برای نمونه؛

قضیه فیثاغورس به‌صورت شرطی چنین است:



اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $BC^2 = AB^2 + AC^2$ است.

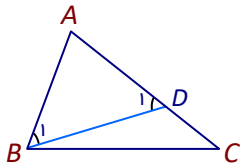
مثال: گزاره‌ی «هرقدر یک ضلع مثلث بزرگ‌تر باشد، زاویه مقابل آن بزرگ‌تر است» را به صورت شرطی نوشته و ثابت کنید.

پاسخ

توجه کنید:

برای بیان راحت‌تر، می‌توانید از شکل و نمادهای ریاضی در بیان شرطی قضایا بهره ببرید.

بنابراین، گزاره‌ی داده شده به صورت شرطی چنین است:



اگر در مثلث ABC مقابل $AC > AB$ باشد، آنگاه $\hat{B} > \hat{C}$ است.

برهان:

چون $AC > AB$ است، می‌توان نقطه‌ی D را روی ضلع AC طوری انتخاب کرد که $AB = AD$ باشد.

- بنابر انتخاب نقطه‌ی D، مثلث ABD متساوی الساقین بوده و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است. از طرفی زاویه‌ی $\hat{B}_1$ جزئی از زاویه‌ی اصلی $\hat{B}$ بوده و در نتیجه $\hat{B} > \hat{B}_1$ است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1$$

- از طرف دیگر، زاویه‌ی $\hat{D}_1$ برای مثلث DBC یک زاویه‌ی خارجی محسوب شده و لذا از زاویه‌ی داخلی غیر مجاور خود، یعنی $\hat{C}$ بزرگ‌تر است. در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 > \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

نقیض گزاره:

هرگاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض آن بدست می‌آید.

توجه کنید:

معمولاً می‌توانید برای نقیض کردن گزاره، عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای آن اضافه کنید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

برای نمونه، یک گزاره و نقیض آن را ببینید:

- **گزاره:** امروز هوا گرم است.
- **نقیض:** چنین نیست که امروز هوا گرم است.

البته می‌توان با برعکس کردن خبر موجود در گزاره، نقیض را به صورت روان‌تر بیان کرد. در نمونه‌ی قبل، می‌توان نقیض را به صورت ساده‌ی زیر بیان نمود:

امروز هوا گرم نیست!

اکنون روش دیگری برای استدلال:

گاهی ارائه‌ی استدلال استنتاجی به صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در چنین صورتی، معمولاً روش اثبات غیر مستقیم به صورت زیر، کمک بسیار زیادی می‌کند:

بُرهان خُلف:

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، «**فرض خلف**» هم می‌گویند.
- با توجه به فرضِ مرحله‌ی قبل و آوردن دلایلی مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله و یا حقایق شناخته شده می‌رسیم.

نتیجه می‌گیریم:

حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: فرض و حکم ادعای زیر را مشخص کرده و آن را ثابت کنید.

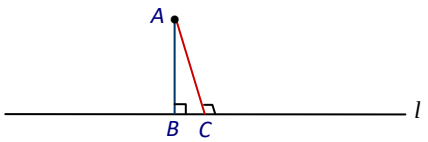
از یک نقطه غیر واقع بر خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

پاسخ

فرض: نقطه‌ی A خارج خط l قرار دارد. **حکم:** از A نمی‌توان بیش از یک خط عمود بر l رسم کرد.

با برهان خلف:

فرض کنید از نقطه‌ی A دو عمود AB و AC را بر خط l رسم کرده باشیم:



یعنی مثلث ABC دو زاویه‌ی 90° داشته و چون اندازه‌ی $\hat{A}$ عددی مثبت است، جمع زوایای مثلث از 180° بیشتر خواهد شد که یک تناقض است. پس:

فرض خلف باطل شده و حکم اثبات می‌شود.

مثال: نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه‌ی باز دارد.

پاسخ

با برهان خلف:

فرض کنید یک مثلث ABC وجود داشته باشد که در آن بیش از یک زاویه‌ی باز داشته باشیم؛ مثلاً $\hat{A}>۹۰^\circ$ و $\hat{B}>۹۰^\circ$. در این صورت:

$$\hat{A}+\hat{B}>۹۰^\circ+۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}>۱۸۰^\circ$$

چون $\hat{C}$ عددی مثبت است، از نامساوی بالا داریم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>۱۸۰^\circ$. اما در مورد مجموع زوایای مثلث می‌دانیم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و بنابراین نامساوی قبل یک تناقض است. **(حکم اثبات شد.)**

عکس قضیه‌ی شرطی:

برای نوشتن عکس یک قضیه‌ی شرطی، جای (نقش) فرض و حکم را عوض می‌کنیم.

توجه کنید:

عکس یک قضیه شرطی ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است حکمی نادرست شود!

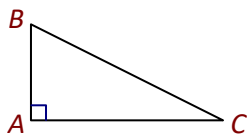
مثال: اولاً: حکم زیر را به صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟

در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است.

ثانیاً: عکس این حکم به صورت شرطی نوشته و مشخص کنید درست یا نادرست است.

پاسخ

اولاً: بیان شرطی حکم با استفاده از شکل چنین است:



اگر مثلث ABC زیر قائم‌الزاویه باشد $\hat{A}=۹۰^\circ$،

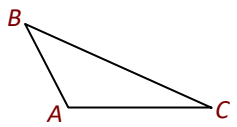
آنگاه وتر BC از دو ضلع AB و AC بزرگ‌تر است.

می‌دانیم که این حکم درست است.

ثانیاً: عکس گزاره با تعویض جای فرض و حکم:

اگر در مثلث ABC ضلع BC از AB و AC بزرگ‌تر باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.

این گزاره نادرست است و می‌توانیم برای آن مثال نقض بیاوریم:



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

نوبت شماست . . .

پای تخته !

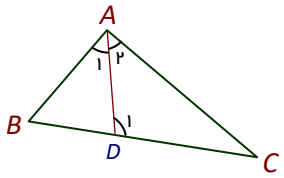
۸. عکس گزاره‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و توسط برهان خلف ثابت کنید:

در هر مثلث، زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبرو به ضلع کوچک‌تر.

خاصیت مهم دیگری در مثلث‌ها را ببینید.

مثال: در مثلث دلخواه ABC نشان دهید: $AB + AC > BC$. سپس نتیجه‌ی این مثال را با زبان ساده بیان کنید.

پاسخ



در مثلث داده شده، نیمساز AD را رسم می‌کنیم:

اکنون:

- $\hat{D}_1$ در مثلث ABD زاویه‌ی خارجی است و بنابراین: $\hat{D}_1 > \hat{A}_1$.
- چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است، بنابراین $\hat{D}_1 > \hat{A}_2$.

پس در مثلث ADC داریم: $\hat{D}_1 > \hat{A}_2$ و در نتیجه $AC > DC$ خواهد بود.

با استدلالی مشابه در مثلث ABD خواهیم داشت: $AB > BD$. با جمع طرفین دو نامساوی اخیر داریم:

$$AC + AB > DC + BD \Rightarrow AC + AB > BC$$

نامساوی نهایی بیان می‌کند که:

در هر مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

قضیه‌هایی که عکس آن‌ها هم درست است، در ریاضیات اهمیت فراوانی دارند:

قضیه‌ی دوشرطی:

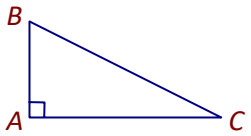
هرگاه عکس یک قضیه شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می‌توان به صورت دوشرطی بیان کرد:

فرض اگر و فقط اگر حکم

برای نمونه؛

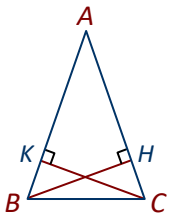
چون عکس قضیه‌ی فیثاغورس صحیح است، می‌توان آن را به صورت دو شرطی بیان کرد:

مثلث ABC **قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با هم برابر باشند.

پاسخ



اولاً: (⇦) فرض و حکم چنین هستند:

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CK$

برهان:

دو مثلث قائم الزاویه‌ی AHB و AKC به حالت «وتر، هم‌نهشت هستند و در نتیجه $BH = CK$ است.

ثانیاً: (⇨) فرض و حکم چنین هستند:

فرض: $BH = CK$ **حکم:** $AB = AC$

برهان:

دو مثلث قائم الزاویه‌ی BHC و CKB به حالت «وتر، هم‌نهشت هستند و در نتیجه $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ است؛ یعنی در مثلث ABC داریم: $\hat{B} = \hat{C}$ و بنابراین $AB = AC$ خواهد شد.

توجه کنید:

چون خود گزاره و عکس آن هر دو اثبات شدند، گزاره‌ی دو شرطی اثبات گردیده است.

تمرینات

۱– دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. توسط ترسیم مناسب، نقاطی در صفحه را مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۲– نقطه‌ی M روی خط l قرار دارد. نقاطی را تعیین کنید که از نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر و از خط l به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۳– قطعه‌ای از یک دایره به صورت مقابل داده شده است. به کمک ترسیم، مرکز دایره‌ی مربوطه را دقیقاً مشخص کنید:

۴– چند لوزی به طول ضلع ۲/۵ سانتی‌متر و قطر کوچک ۶ سانتی‌متر قابل رسم است؟

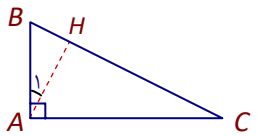
۵– مشخص کنید کدام مورد درست و کدام نادرست است. برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید.

- هر مثلث متساوی الساقین یک مثلث متساوی الاضلاع است.
- هر مثلث متساوی الاضلاع یک مثلث متساوی الساقین است.
- هر لوزی یک متوازی الاضلاع است.
- توان سوم هر عدد بزرگ‌تر از توان دوم آن عدد است.
- جذر یک عدد از خود آن عدد کوچک‌تر است.

۶– نقیض هر مورد را به صورت روان بنویسید:

- عدد a بزرگ‌تر از عدد b است.
- عدد ۱۳ زوج است.
- تساوی $x-۳=۵$ برقرار است.

۷– در شکل مقابل مثلث قائم الزاویه و $\hat{C} \neq \hat{A}_1$ است.

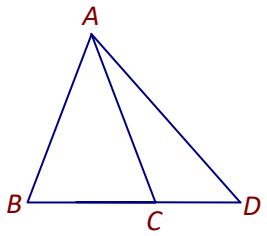


توسط برهان خلف نشان دهید AH نمی‌تواند ارتفاع مثلث باشد.

۸– قضیه‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را هم به صورت شرطی بنویسید. آیا این قضیه دوشرطی محسوب می‌شود؟ چرا؟

هر دو زاویه‌ی قائمه مکمل هستند.

۹– در شکل زیر $AB = AC$ است و نقطه‌ی D بیرون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید: $AB < AD$.



۱۰– کدام مورد را می‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان کرد؟ در صورت امکان به صورت دوشرطی بنویسید:

- هر مثلث با دو ضلع برابر، دو زاویه‌ی برابر دارد.
- هر مربع یک مستطیل است.
- نقطه‌ی همرسی نیمسازها درون مثلث قرار دارد.

۱۱– نقطه‌ای درون مثلث مشخص کنید که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.

۱۲– نقطه‌ای مشخص کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد. آیا این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد؟

۱۳– در کدام نوع مثلث، نقطه‌ی همرسی نیمسازها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است؟

۱۴– نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر را دقیقاً مشخص کنید.
نتیجه‌ی حل این تمرین چیست؟

۱۵– جاهای خالی را در عبارت زیر طوری کامل کنید که مسأله:

الف) دو جواب داشته باشد. ب) یک جواب داشته باشد. پ) جواب نداشته باشد.

«نقاط A و B به فاصله‌ی ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر . . . . . و از نقطه‌ی B برابر . . . . . باشد.»

۱۶– در مثلث ABC می‌دانیم $AB = ۲x - ۱$ و $AC = ۴x + ۲$ و $BC = ۷x$ است. حدود x را مشخص کنید.

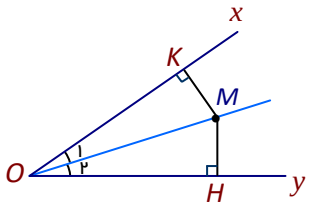
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

این قسمت را فقط در صورتی ببینید که قصد مقایسه‌ی پاسخ خود با پاسخ صحیح را دارید!

۱– فرض کنید $MH = MK$ باشد.



در این صورت دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت خواهند بود:

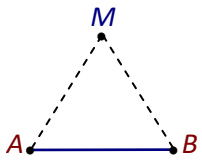
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MK \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

از این هم‌نهشتی برابری اجزای نظیر نتیجه می‌شود؛ از جمله:

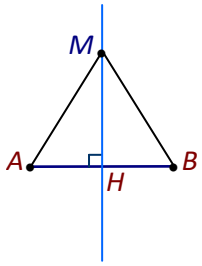
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

یعنی: نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۲– فرض کنید بدانیم $MA = MB$ است.



از نقطه‌ی M خطی بر AB عمود می‌کنیم و می‌بینیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ MA = MB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

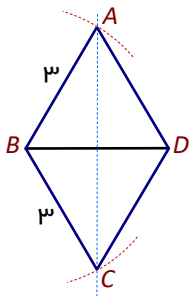
بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $AH = HB$ است و بنابراین خط گذرا از M و H عمود منصف بوده و M روی آن قرار دارد.

۳– با توجه به این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط BD را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

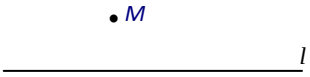
- طبق روش جزوه، عمود منصف این پاره‌خط را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.



- چون طول اضلاع لوزی ۳ سانتی‌متر است، به مرکز B و شعاع ۳ کمان‌هایی می‌زنیم تا عمود منصف را در نقاط A و C قطع کند.

در پایان نقاط را با خط‌کش به هم وصل کرده تا لوزی رسم شود.

۴– فرض کنید نقطه‌ی M خارج خط l داده شده است.

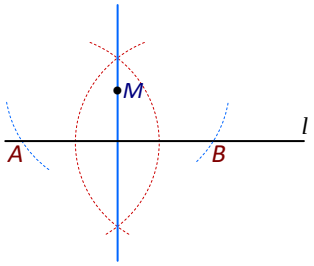


گام ۱: به مرکز M و شعاعی بیشتر از فاصله‌ی نقطه تا خط، کمانی می‌زنیم تا خط را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند.

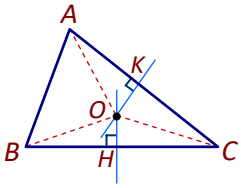
گام ۲: اکنون کافی است عمود منصف AB رسم شود.

توجه کنید: چون A و B روی دایره به مرکز M قرار دارند، $MA = MB$ است و در نتیجه طبق خاصیت اصلی عمود منصف، نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد.

پس: عمود منصف رسم شده همان خط مورد نظر است که از M گذشته و بر خط عمود شده است.



۵– مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، عمود منصف‌های دو ضلع AC و BC را رسم کرده، نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم و این نقطه را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم:



اکنون توجه کنید:

- چون O روی عمود منصف AC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OA = OC$$

- به صورت مشابه، چون O روی عمود منصف BC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OB = OC$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OA = OB$. یعنی فاصله‌ی O تا دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است و بنابراین:

نقطه‌ی O روی عمود منصف AB نیز قرار داشته و سه عمود منصف در نقطه‌ی O همرس هستند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

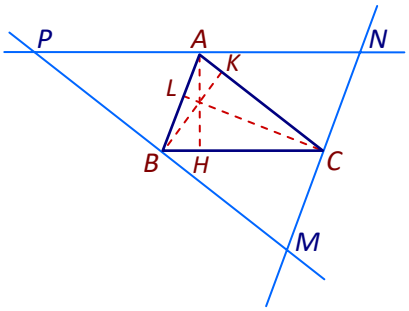
۶– به هر یک از گام‌ها توجه کنید:

گام ۱:

مثلث ABC و سه ارتفاع آن را رسم می‌کنیم.

گام ۲:

از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبرو رسم کرده تا مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳:

بسیار ساده: چون PN با BC موازی است و AH بر BC عمود است، پس AH بر PN نیز عمود خواهد بود. با استدلال مشابه، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

گام ۴:

بسیار ساده: چون با موازی و با موازی هستند، چهار ضلعی‌های $ABCN$ متوازی الاضلاع است. پس طبق خواص متوازی الاضلاع (جزوه شماره صفر) ضلع‌های روبرو برابرند:

$$BC = AN$$

با استدلال مشابه چهارضلعی $ACBP$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه:

$$BC = AP$$

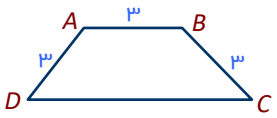
با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $AN = AP$ است. به صورت کاملاً مشابه، تساوی‌های $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵:

از گام‌های ۳ و ۴، AH هم بر PN عمود است و هم آن را نصف کرده است و لذا AH عمود منصف PN است. به صورت مشابه، BK عمود منصف PM و CL عمود منصف MN است. یعنی:

ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP هستند و چون عمود منصف‌ها همرس‌اند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس هستند.

۷– کافی است یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین در نظر بگیرید که اندازه‌ی ساق‌ها برابر قاعده‌ی کوچک باشد:



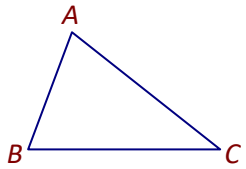
در این چهارضلعی $AD = BC$ و $AB || DC$ است، ولی این شکل متوازی الاضلاع نیست.

۸- بیان ساده‌ی عکس حکم چنین است:

در یک مثلث، ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

به صورت شرطی و با استفاده از شکل:

اگر در مثلث ABC مقابل $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آنگاه $AC > AB$ است.



برهان خلف:

حکم $AC > AB$ را نادرست در نظر می‌گیریم، بنابراین دو حالت می‌تواند رخ دهد: $AC = AB$ و $AC < AB$ که نشان می‌دهیم هیچ‌کدام ممکن نیستند:

- **حالت ۱:** اگر $AC = AB$ باشد، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و در نتیجه طبق خواص این نوع مثلث $\hat{B} = \hat{C}$ است. این مطلب با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.
- **حالت ۲:** اگر $AC < AB$ باشد، طبق مثال جزوه باید زاویه‌ی روبرو به AB از زاویه‌ی روبرو به AC بزرگ‌تر باشد، یعنی: $\hat{C} > \hat{B}$. این مطلب نیز با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.

پس در هر صورت فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.